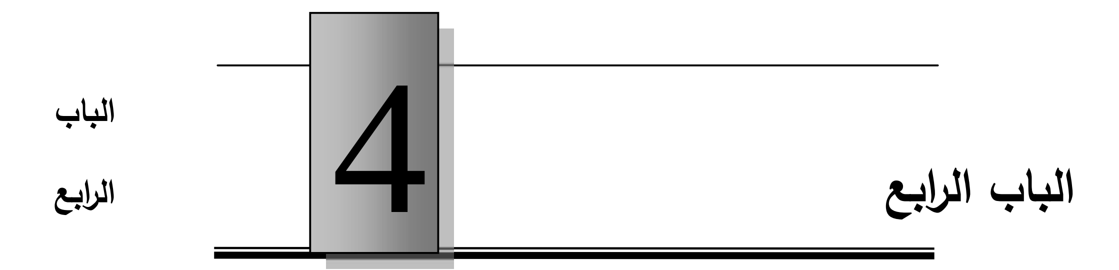
الجزء الثالث

التراكيب المنفصلة
Discrete Structures



د. عمر زرتي
Dr. Omar Zarty

قسم الحاسوب \كلية العلوم\ جامعة طرابلس



المتواليات Sequences

4.1 مقدمة

تعتبر المتوالية تركيبة منفصلة discrete structure تمثل قائمة لانهائية من القيم تتولد بطريقة محددة. وهي حالة خاصة من الدالة، لأنها عبارة عن دالة نطاقها الأعداد الطبيعية، فإذا رمزنا لاسم هذه الدالة بالرمز a فإن

$$a : Z \to S$$

حيث

$$Z = \{0,1,2,\ldots.\}$$

وبدلا من أن نستخدم a(n) كما هو الحال في الدوال، عادة ما نستخدم

$$\{a_n\}$$

للتعبير عن المتوالية.

4.2 أمثلة لبعض المتواليات

مثال(1): إذا كان $a_n = 5^n$ ، حيث $n = 0,1,2,\ldots$

فإن هذه المتوالية يمكن سرد عناصرها كما يلي:

$$\{a_n\} = 1, 5, 25, 125,\ldots$$

مثال(2): إذا كان $a_n = 1/n$ حيث $n = 1, 2, 3,\ldots$

فإن المتوالية :

$$\{a_n\} = 1, 1/2, 1/3, \ldots.$$

لاحظ هنا أن النطاق لا يشمل الصفر لأن ذلك يؤدي إلى القسمة على صفر.

مثال(3): إذا كان $b_n = (-1)^n$ ، حيث $n = 0, 1, 2, \dots$

فإن :

$$\{b_n\} = 1, -1, 1, -1, \dots$$

مثال **(4):** أوجد الحد العاشر من المتوالية:

5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53

علينا هنا أن نستنتج العلاقة بين الحد والذي يليه. نلاحظ أن الفرق بين الحد والذي يليه هو 6 وبالتالي فإن الحد

العاشر هو $53 + 6 = 59$

4.3 المتوالية الحسابية arithmetic sequence

المتوالية في المثال (4) هي حالة خاصة من المتوالية الحسابية arithmetic sequence .

والشكل العام لها هو :

$$a,\ a+d\ ,\ a+2d\ ,\ a+3d\ ,\ \dots$$

فمثلا المتوالية:

5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53

هي متوالية حسابية حيث نلاحظ هنا أن الفرق بين الحد والذي يليه هو 6 وبالتالي فإن $d=6$

$a=5$

مثال(5): هل المتوالية:

1, 7, 25, …

حسابية؟

الإجابة : لا، لأن الفرق بين الحد الأول والثاني لايساوي الفرث بين الحد الثاني والثالث.

مثال(6) بين أن مجموع المتوالية الحسابية

$$1 + 2 + 3 + \dots + n$$

هو $n(n+1)/2$

الاثبات:دع

$$S = 1 + 2 + 3 + ... + n$$

يمكننا كتابة المتوالية تنازليا كما يلي

$$S= n + (n-1) + ... + 3 + 2 + 1$$

الآن نقوم بجمع الصيغتين:

$$2S = (1+n) + (2 +(n-1)) + (3+(n-2)) + \ldots+(n+1)$$
$$=(n+1) + (n+1) + ... + (n+1)$$

حيث نلاحظ وجود n من الحد n+1. أي أن

$$2S= n(n+1)$$
$$S= n(n+1)/2$$

4.4 مجموع المتوالية

أحيانا تكون حدود المتوالية مجموع حدود متوالية أخرى.

مثال(7): ما هي المتوالية

$$a_n = \sum j^2$$

(حيث j من 1 الى n) عندما n=3 وعندما n=5؟

الإجابة:

$$a_n =1 + 4 + 9 + 16 + \ldots + n^2$$
$$a_3 =1 + 4 + 9= 14$$
$$a_5 =1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

مثال(8): ما هي المتوالية

$$a_n = \sum (-1)^k$$

حيث k من 0 الى n؟

الإجابة:

$$a_n = \quad 1 – 1 + 1 – 1 + ...$$

هنا نلاحظ أن

$a_n= 0$ if n=even زوجي

$a_n= 1$ if n=odd فردي

4.5 المتوالية الهندسية geometric sequence

هي المتوالية

$$a_n = r^n$$

حيث r هو عدد حقيقي. مثلا إذا كانت r=2 فإن المتوالية تكون على النحو التالي:

1 , 2, 4 , 8 , ,,,

مثال(8): ما هي قيمة

$$a_n = \sum r^k$$

حيث $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

<u>الإجابة:</u> المطلوب هنا مجموع متوالية هندسية geometric sequence

حيث

$$a_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^n$$

ملاحظة:
يمكن حساب مجموع المتوالية الهندسية من القانون:
$\sum r^k = (r^{n+1} - 1) / (r - 1)$
حيث k من 0 الى n . سنثبت هذا القانون في الفصل القادم إن شاء الله.

مثال(9): ما هي قيمة

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{10}$$

الاجابة: هذه متوالية هندسية حيث في هذا المثال

$$r = 2 \quad , \quad n = 10$$

لذلك فإن $S = (2^{11} - 1)/(2-1) = 2^{11} - 1 = 2047$

4.6 برنامج لمتوالية

مثال(10): اكتب برنامجا بلغة باسكال لطباعة 6 حدود من المتوالية التالية :

1, 2, 6, 24, 120, 720, ..

حيث $a_n = n!$

في كتابة هذا البرنامج نستفيد من العلاقة $(n+1)! = (n+1)n!$

```
 PROGRAM factorial ;
VAR  i , f : INTEGER ;
BEGIN
f = 1 ;
FOR  I := 1  TO  6
BEGIN
WRITE (f : 6 );
```

```
  f = f * i ;
END;
END.
```

4.7 تمـــارين (7)

1) إذا كان

$$a_n = 2(-3)^n + 5^n$$

أوجد :

a) a_0 b) a_1 c) a_4 d) a_5

2) اكتب متوالية الأعداد الأولية prime numbers حيث العدد الأولي هو العدد الذي لايقبل القسمة إلا على نفسه أو على الواحد.

3) اكتب متوالية فيبوناتشي Fibonacci

حيث

$$a_0 = 1 \quad a_1 = 1 \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$
$$n = 1, 2, 3, \ldots.$$

أي أن كل حد يساوي مجموع الحدين السابقين.

4) اكتب المتوالية $\{a_n\}$ حيث

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} k$$

5) ما نوع المتوالية التالية :

3, 6, 12, 24,…

وما هو مجموع 8 حدود الأولى ؟ (يدون اجراء عملية الجمع)

6) استخدم قانون مجموع المتوالية الهندسية لتحويل العدد الثنائي $(11111111)_2$ الى النظام العشري؟

7) احسب:

a) $\sum (k+1)$

حيث k من 1 الى 5 .

b) $\sum (-2)^j$

حيث j من 0 الى 4 .

c) $\sum 3j^0$

حيث j من 1 الى 10 .

d) $\sum(2^{j+1} - 2^j)$

حيث j من 0 الى 8 .

e) $\sum (3^j - 2^j)$

حيث j من 0 الى 8 .

8) اثبت أن

$$\sum (a_j - a_{j-1}) = a_n - a_0$$

حيث j من 1 الى n.

9) اثبت أن

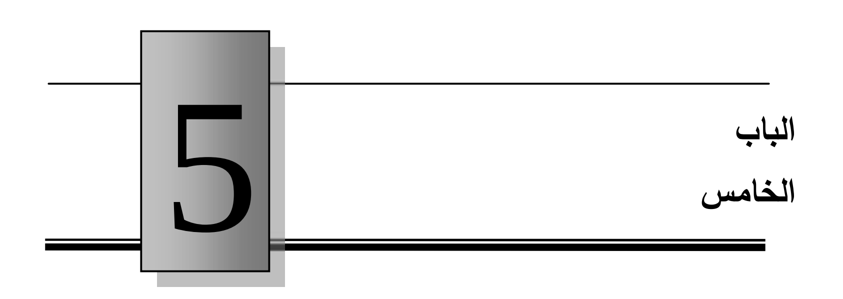
$$\sum 1/[k(k+1)] = 1 - 1/(n+1) = n/(n+1)$$

حيث k من 1 الى n.

ارشاد:

$$1/[k(k+1)] = 1/k - 1/(k+1)$$

10) اكتب برنامجا لطباعة 10 حدود الاولى من المتوالية {n(n+1)}



الاستنتاج الرياضي

Mathematical Induction

5.1 مقدمة

إذا أعطيت دالة منطقية P(n) كيف تبرهن أن هذه الدالة قيمتها TRUE لجميع الأعداد الصحيحة $n=0, 1, 2, \ldots$ ؟ هذا ما سندرسه في هذا الباب باستخدام ما يعرف بالاستنتاج الرياضي (أو الاستقراء الرياضي) .

معطيات المسألة هي الدالة المنطقية P(n) والمطلوب اثبات أن

$$P(n) = TRUE \quad \forall n=0, 1, 2, ..$$

البرهان يعتمد على إتباع الخطوتين التاليتين:

1- التحقق من أن البداية صائبة ، أي أن $P(1) = TRUE$.

2- التحقق من أن التضمين :

$$P(n) \rightarrow P(n+1)$$

صائب (true) لجميع n في فئة الأعداد الصحيحة الموجبة .

إذا أثبتنا الخطوتين (1) و (2) فذلك يعني أن : $\forall n\ P(n) = TRUE$

أي أن الاستنتاج الرياضي يرتكز على النظرية التالية :

$$P(1) \wedge (\forall n\ P(n) \rightarrow P(n+1)) \rightarrow \forall n\ P(n)$$

والسؤال الذي يفرض نفسه هنا: لماذا إذا تحقق الشرطان المذكوران أعلاه فإن ذلك يعني أن $P(n)=True$ لجميع n في فئة الأعداد الصحيحة الموجبة؟

والإجابة أن الشرط الأول يحقق المطلوب في الخطوة الأولى ، والشرط الثاني يحققه في الخطوة الثانية والثالثة الى مالانهاية.
أي أن الاستنتاج الرياضي يقوم على أساس أنه إذا كانت البداية صحيحة وكانت كل مرحلة تؤدي الى المرحلة التي تليها بشكل صحيح فإن جميع المراحل ستكون صحيحة.

5.2 مجموع الأعداد الفردية

نبدأ أول مثال على استخدام فكرة الاستنتاج الرياضي باثبات أن مجموع الأعداد الفردية من 1 إلى $2n - 1$ هو

$$P(n) = 1+3+5+\ldots+(2n - 1) = n^2$$

الإثبات:

أولا نلاحظ أن عندما $n=1$ $\quad P(1) = 1 = (1)^2$

أي أن $P(1)$ صحيحة منطقيا .

الآن افترض أن $P(n)$ صحيحة منطقيا (أي أن $P(n)=n^2$) اثبت أن:

$$P(n+1)= (n+1)^2$$

وهذا يمكن اثباته كما يلي:

$$\begin{aligned} P(n+1) &= 1+3+5+\ldots+(2n-1)+(2(n+1)-1) \\ &= 1+3+5+\ldots+(2n+2-1) \\ &= 1+3+5+\ldots+(2n+1) \\ &= 1+3+5+\ldots+(2n-1)+(2n+1) \end{aligned}$$

$= n^2+(2n+1) = n^2+2n+1= (n+1)^2$ أي أن $P(n+1)$

صحيحة منطقيا ، وبالتالي فإن :

$\forall n\ P(n)$ صحيحة منطقيا لجميع $n=1, 2, 3, \ldots$.

5.3 اثبات المتباينات

يمكن استخدام الاستنتاج الرياضي في اثبات بعض المتاينات.

مثال: أثبت أن :إذا كانت n عدد صحيح $n\geq 0$ فإن $n<2^n$

الإثبات: الخطوة الأولى : بوضع $n=0$ فإن

$$0< 2^0$$

وهي صائبة لأن $0 < 1$.

الخطوة الثانية : افترض أن P(n) صائبة منطقيا ، أي

$n<2^n$

اثبت أن P(n+1) هي أيضا صائبة،

أي المطلوب إثبات أن :

$n + 1 < 2^{n+1}$

وهي صائبة لأن بإضافة 1 لطرفي المتباينة $n<2^n$ نحصل على

$n + 1 < 2^n + 1$

وبما أن ($1<2^n$) لجميع $n>0$ فإن

$n + 1 < 2^n + 2^n = 22^n = 2^{n+1}$

5.4 مجموع المتوالية الهندسية

أثبت أن مجموع المتوالية الهندسية

$$P(n) = 1 + r + r^2 + \ldots + r^n$$

هو

$$[r^{n+1} - 1]/(r - 1)$$

حيث $n \geq 1$ ، $r > 1$.

الإثبات:

$$P(1) = (r^2 - 1)/(r - 1)$$

ولكن $r^2 - 1 = (r - 1)(r + 1)$

وبما أن $r \neq 1$ فإن

$$P(1) = r + 1$$

أي أن الصيغة P(n) تتحقق عندما n=1. والآن افترض أن P(n) هي صائبة:

$$P(n) = (r^{n+1} - 1)/(r - 1) = 1 + r + r^2 + \ldots + r^n$$

وهذا يؤدي إلى أن

$$\begin{aligned} P(n + 1) &= 1 + r + r^2 + \ldots + r^n + r^{n+1} \\ &= 1 + r(1 + r^2 + \ldots + r^n) \\ &= 1 + r (r^{n+1} - 1)/(r - 1) \\ &= 1 + (r^{n+2} - r)/(r - 1) \\ &= [r - 1 + (r^{n+2} - r)] /(r - 1) \\ &= (r^{n+2} - 1)/(r - 1) \end{aligned}$$

وهو المطلوب اثباته.

5.5 رتبة فئة القوى

سبق ،ان ذكرنا الفئة ذات n عنصر لها 2^n فئة جزئية (أي أن رتبة فئة القوى لها هي 2^n) ويمكننا الآن اثبات ذلك باستخدام الاستنتاج الرياضي.

الإثبات: هذه النظرية صحيحة عندما n=1 لان الفئة ذات العنصر الواحد لها فئتان جزئيتان فقط هما Ø (الفئة الخالية) والفئة نفسها.

الخطوة الثانية هي افتراض أن النظرية صائبة في حالة وجود n عنصر وإيجاد عدد الفئات الجزئية في حالة n + 1 عنصر .

لاحظ أن زيادة عنصر إلى الفئة S سيضاعف من عدد الفترات الجزئية (انظر الملاحظة أدناه) وهذا يعني أن عدد الفئات الجزئية في الفئة التي عناصرها n+1 هو

$$2^n + 2^n = 2\, 2^n = 2^{n+1}$$

وهو المطلوب إثباته .

ملاحظة: لتوضيح أن عدد الفترات الجزئية يتضاعف عند إضافة عنصر واحد للفئة . دع

$$P1 = \{A1, A2, \ldots, Am\}$$

هي فئة القوى للفئة A. إذا أضفنا العنصر a للفئة A فإن فئة القوى تصبح على النحو التالي:

$$P2 = \{A1, A2, \ldots, Am, A1 \cup \{a\}, A2 \cup \{a\}, \ldots, Am \cup \{a\}\}$$

حيث نلاحظ أن :

$$|P2| = 2m = 2\,|P1|$$

5.6 تمــــارين (8)

1− اثت أن $2^n > n^2$ حيث n عدد صحيح أكبر من 4

2−اثبت أن $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = [n(n+1)(2n+1)]/6$

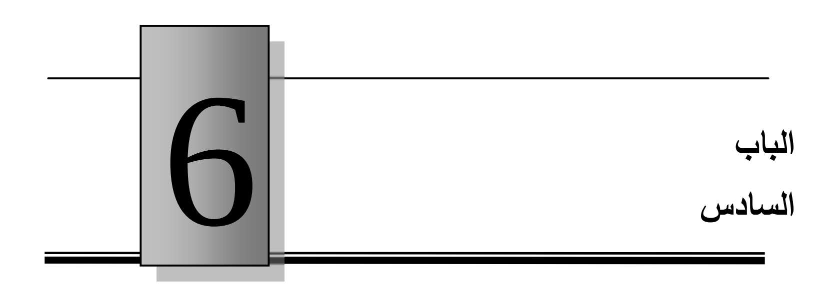
حيث n عدد صحيح موجب .

3− اثبت أن

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n+1) = [(n+1)(2n+1)(2n+3)]/3$$

حيث n عدد صحيح موجب.

4- أكتب برنامجا للتحقق من القوانين في تمرين (1) ، (2) ، (3) . احسب الطرف الأيمن والأيسر من كل قانون لبعض قيم n وبين أنهما متساويان.



طرق العـــد
Methods of Counting

6.1 مقدمة

الغرض من هذا الباب هو دراسة طرق عد العناصر في فئة معينة وهو موضوع له تطبيقات كثيرة تتعلق بعلم الحاسوب بشكل أساسي (على سبيل المثال في دراسة طرق أمن الحاسوب).

6.2 قاعدة الجمع

إذا كان $|A|$ = عدد العناصر في الفئة A. و عدد العناصر في الفئة= $|B|$

فإن عدد العناصر في اتحاد فئتين A و B يمكن حسابه من العلاقة :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

ملاحظة : إذا كان $A \cap B = \emptyset$ فإن

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

مثـال: إذا كـان عـدد الطلبـة المـسجلين فـي مقـرر (مبـادئ الحاسـب) هـو 15 ، وعـدد الطلبـة المسجلين في مقرر (باسكال) هو 20 وكان هناك 5 طلبة مسجلون في كلا المقررين فإن:

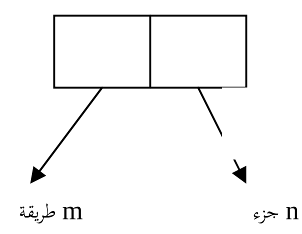
عدد الطلبة في المقررين =

$$|A1| + |A2| - |A1 \cap A2| = 15 + 20 - 5 = 30$$

6.3_ قاعدة الضرب

إذا كان العمل يمكن تقسيمه إلى n من الأجزاء ، وكل جزء يمكن أداؤه بعدد m من الطرق فإن :

عدد الطرق لأداء العمل = $m \times n$



مثال: كم عدد الطلبة يمكن ترقيمهم بحيث يبدأ الترقيم من A01 إلى Z99؟

<u>الإجابة:</u>

نطبق قاعدة الضرب

بما أن عدد الحروف اللاتينية = 26

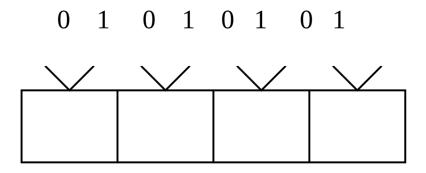
وعدد الأرقام في خانتين من 01 إلى 99 هو 99 فإن:

عدد الطلبة الذين يمكن ترقيمهم بهذه الطريقة = 26×99

$= 2574$

مثال: كم عدد الكلمات الثنائية التي يمكن تكوينها في 4 خانات ثنائية ؟

<u>الإجابة:</u>



بما أن هناك خيارين في كل خانة (هما 0 أو 1) فإن العدد الإجمالي هو

$2\times2\times2\times2 = 16$

مثال: كم عدد الدوال التي يمكن تعريفها على الفئتين A , B حيث

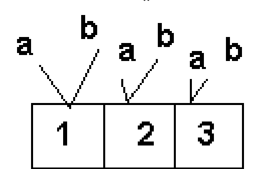
A = {1, 2, 3}

B ={a, b}

ماهي هذه الدوال؟

الاجابة:

نلاحظ أن كل عنصر في A يقابله اختياران في B هما a أو b على النحو التالي:



لذلك فإن عدد الاختيارات لدينا هو :

8=2*2*2

الدوال التي يمكن تعريفها هي:

f1= {(1,a),(2,a),(3,a)}
f2={(1,a),(2,a),(3,b)}
f3={(1,a),(2,b),(3,a)}
f4={(1,a),(2,b),(3,b)}
f5={(1,b),(2,a),(3,a)}
f6={(1,b),(2,a),(3,b)}
f7={(1,b),(2,b),(3,a)}
f8={(1,b),(2,b),(3,b)}

حيث نلاحظ أن عدد الدوال هو $2^3 = 8$

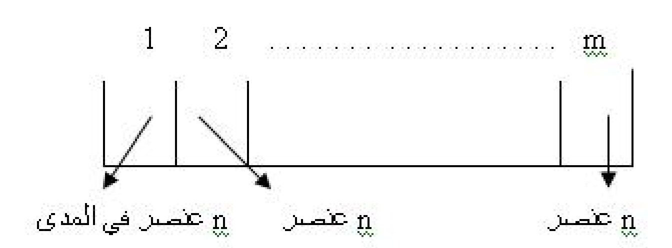
<u>ملاحظة</u>: بصورة عامة

عدد الدوال = n^m = $n\times n\times\ldots\times n$

حيث

m = عدد عناصر النطاق

n = عدد عناصر المدى



مثال:

إذا كانت

A= {1, 2} B={a, b, c}

كم عدد الدوال من نوع 1-1 التي يمكن تعريفها من A الى B؟

الاجابة:

في هذا المثال، الدالة من نوع 1-1 هي الدالة التي فيها f(1) لا يساوي f(2)

وحيث أنه يوجد 3 اختيارات لقيم f(1) وفي كل اختيار يبقى لنا اختياران فقط ل f(2) وبتالي نطبق قاعدة الضرب

عدد الدوال = 3*2 = 6

والدوال هي:

F1 = { (1,a), (2,b)}
F2 = { (1,a), (2, c) }
F3 = { (1,b), (2,a)}
F4= { (1,b), (2,c)}
F5={ (1,c), (2,a) }
F6 ={ (1,c), (2,b)}

ملاحظة:

بصورة عامة إذا هناك m عنصر في النطاق و n عنصر في المدى فإن عدد الدوال من نوع 1-1 التي يمكن تعريفها هو

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$$

وذلك على النحو التالي:

1 2 3 . . . . m

$n - m + 1$

عنصر n عنصر n − 1 عنصر n − 2

فإذا كانت m=n (أي أن الدالة من نوع 1−1 وفوقية) فإن عدد الدوال التي يمكن تعريفها هو n!.

مثال: كم عدد الفئات الجزئية التي يمكن تكوينها من فئة عدد عناصرها n ؟

لاحظ هنا أن كل فئة جزئية يمكن تمثيلها بعدد ثنائي . فمثلا إذا كانت الفئة
$S = \{a, b, c\}$

فإن

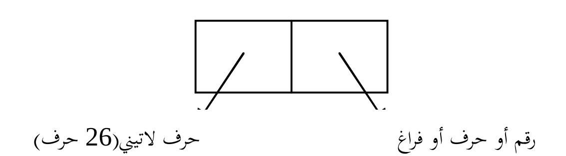
$$000 \leftrightarrow \varnothing$$
$$100 \leftrightarrow \{a\}$$
$$010 \leftrightarrow \{b\}$$
$$011 \leftrightarrow \{b, c\}$$
$$111 \leftrightarrow \{a, b, c\}$$

ومن هذا نرى أن عدد الفئات الجزئية هو

$$(11\ldots1)_2 + 1 = 1+2+\ldots+2^{n-1} + 1 = (2^n - 1)+1 = 2^n$$

حيث تمت إضافة 1 مقابل الفئة الخالية.

مثال: كم عدد المتغيرات في لغة برمجة بحيث يأخذ المتغير الشكل التالي:



الإجابة: عدد المتغيرات = (26 + 10 + 1) 26

= 37 × 26

= 962

مثال: كم عدد كلمات السر التي يمكن تكوينها في 4 خانات حيث كل خانة يمكن أن تحتوي على رقم أو حرف.

الإجابة: $(26+10)^4 = 36^4$

$= 1,679,616$

لاحظ هنا أن لدينا 26 حرف و 10 أرقام . أي أن عدد الاختيارات في كل خانة هو $10 + 26 = 36$

6.4 تمـــارين (9)

1- إذا كان عدد الطلبة في قسم الحاسوب هو 16 وعدد الطلبة بقسم الإدارة هو 23 :

(أ) ما هو عدد الطرق لتكوين فريق من طالبين، واحد من قسم الحاسوب والآخر من قسم الإدارة ؟

(ب) كم عدد الطرق لاختيار طالب واحد من القسمين؟

2- اختبار من نوع الاختيارات المتعددة به 10 أسئلة ، بكل سؤال 4 اختيارات. أ – ما عدد الطرق التي يمكن أن يجيب بها الطالب (دون أن يترك أي سؤال بدون إجابة) ؟

ب- ما عدد الطرق التي يمكن أن يجيب بها الطالب مع إمكانية ترك أسئلة بدون إجابة ؟

3- إذا كان هناك عدد 5 رحلات من طرابلس إلى روما ، وكان هناك 10 رحلات من روما إلى لندن ، فكم عدد الطرق التي يمكن أن يسافر بها من طرابلس إلى لندن عن طريق روما ؟

4- كم عدد الكلمات التي يمكن كتابتها في 3 خانات مستخدما الأحرف الانجليزية ؟

5- كم عدد الكلمات ذات 3 أحرف بشرط أن تبدأ بالحرف A.

6- كم عدد الكلمات الثنائية في 10 خانات ثنائية بشرط أن تبدأ بالواحد وتنتهي بالواحد ؟

6.5 التباديل Permutations

إذا كانت الفئة S تحتوي على العناصر {a1,a2,…,an}

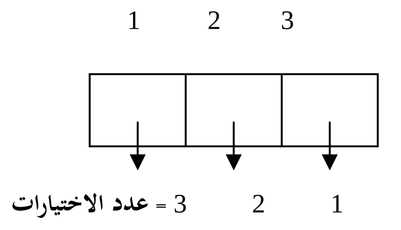
فكم عدد الطرق التي يمكن بها سرد هذه العناصر ؟

مثلا الفئة {1,2,3} يمكن سردها بالطرق التالية:

$$S = \{1,2,3\}$$
$$= \{1,3,2\}$$
$$= \{2,3,1\}$$
$$= \{2,1,3\}$$
$$= \{3,1,2\}$$
$$= \{3,2,1\}$$

أي يوجد 6 طرق لترتيب عناصر هذه الفئة. لاحظ عدم تكرار العناصر في كل ترتيب .

ويمكن حساب عدد هذه الطرق من الشكل التالي:



إذا اخترنا عنصرا في الخانة الأولى من بين العناصر الثلاثة، يبقى في الخانة الثانية اختياران فقط ، وفي الخانة الثالثة اختيار واحد. وباستخدام قاعدة الضرب فإن:

$$\text{عدد الترتيبات} = 3\times2\times1 = 3!$$
$$= 6$$

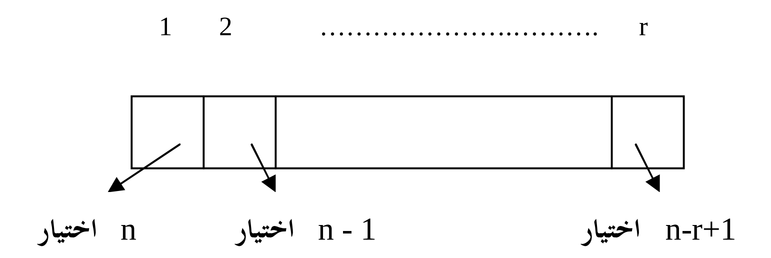
بصورة عامة إذا كان عدد عناصر الفئة هو n فإن:

$$P(n) = n!$$

هو عدد الترتيبات التي يمكن عملها من n عنصر. وتسمى P(n) هنا (permutation) التباديل.

ماذا لو نريد ترتيب r من العناصر حيث لدينا n من الاختيارات لكل عنصر؟

في هذه الحالة يكون الوضع بالشكل التالي:



عدد الاختيارات (عدد الترتيبات) هو

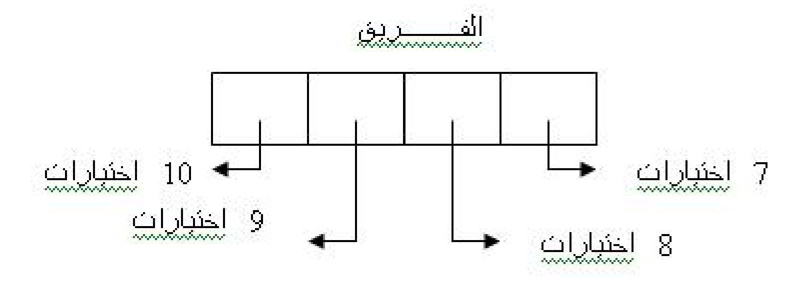
$$n(n - 1)....(n - r + 1) =$$

ونرمز لها بالرمز $p(n,r)$ وتسمى r-permutation

لاحظ أن:

$$P(n,r) = n!/(n - r)!$$

مثال: ما عدد الكلمات التي يمكن تشكيلها من بين 10 حروف إذا كان عدد الخانات هو 4 مع عدم تكرار الحرف في الكلمة .



الإجابة: عدد الكلمات هو

$$P(10,4) = 10!/(10 - 4)! = 10!/6!$$
$$= 10\times9\times8\times7 = 5040$$

مثال: بائع متجول يريد زيارة 8 مدن ابتداء من طرابلس ،والمدن الباقية بطريقة عشوائية وبأي ترتيب. ما عدد الطرق التي يمكن أن يزور بها كل المدن (بشرط عدم زيارة المدينة أكثر من مرة)

طرابلس → 1 2 3 4 5 6 7

7 اختيارات

6 اختيارات

5 اختيارات

اختيار 1

عدد الاختيارات (عدد الطرق) هو

$$7! = 7\times6\times5\times4\times3\times2\times1 = 5040$$

ملاحظة:إذا أراد البائع حساب أقصر طريق لزيارة كل المدن،تسمى المسألة

TSP = Traveling Salesman Problem

أي مسألة البائع المتجول.

6.6 التوافيق Combinations

إذا قمنا باختيار m عنصر من فئة عدد عناصرها n حيث $m \leq n$ بغض النظر عن ترتيب هذه العناصر فإن هذا الاختيار يسمى تركيبة (أو توفيق). أي أن الترتيب هنا غير مهم، بمعنى أن (عمر وعلي) هما (علي وعمر) لافرق.

مثال(1): ما عدد الاختيارات لتشكيل لجنة من 3 أعضاء من بين 5 مرشحين؟

في هذا المثال نلاحظ أن اللجنة تتكون من 3 أعضاء بغض النظر عن ترتيبهم، مثلا اللجنة {1,2,3} هي نفس اللجنة {1,3,2} أي أن الترتيب هنا غير مهم. أو بتعبير آخر أن الفئة (التوفيق combination) {1,2,3} نفس التوفيق {1,3,2} ونفس التوفيق {2,3,1} وبالتالي فإن عدد الاختيارات في حالة التوافيق أقل من الاختيارات في حالة التباديل permutation.

نظرية: عدد التركيبات (التوافيق) r-combinations من فئة ذات n عنصر هو

$$C(n, r) = n! / r!(n - r)!$$

ملاحظة : أحيانا نستخدم الرمز

$$\binom{n}{r} = C^{n}_{1} = C\,(n,r)$$

ويسمى هذا الرقم بمعامل ذات الحدين binomial coefficient

بهذا فإن عدد الاختيارات لتشكيل لجنة من 3 أعضاء من بين 5 أشخاص هو :

$$C^{5}_{3} = C\,(5,3) = 5!/(3!\,2!) = (4\times5)/2 = 10$$

مثال(2): استخدم نظرية ذات الحدين لحساب $(x+y)^4$

الإجابة:

$$(x+y)^4 = C^4_0\ x^4 + C^4_1\ x^3y + C^4_2\ x^2y^2 + C^4_3\ xy^3 + C^4_4\ y^4$$

حيث

$$C^4_0 = 4!/4! = 1$$
$$C^4_1 = 4!/3! = 4$$
$$C^4_2 = 4!/(2!\,2!) = 6$$

أي أن:

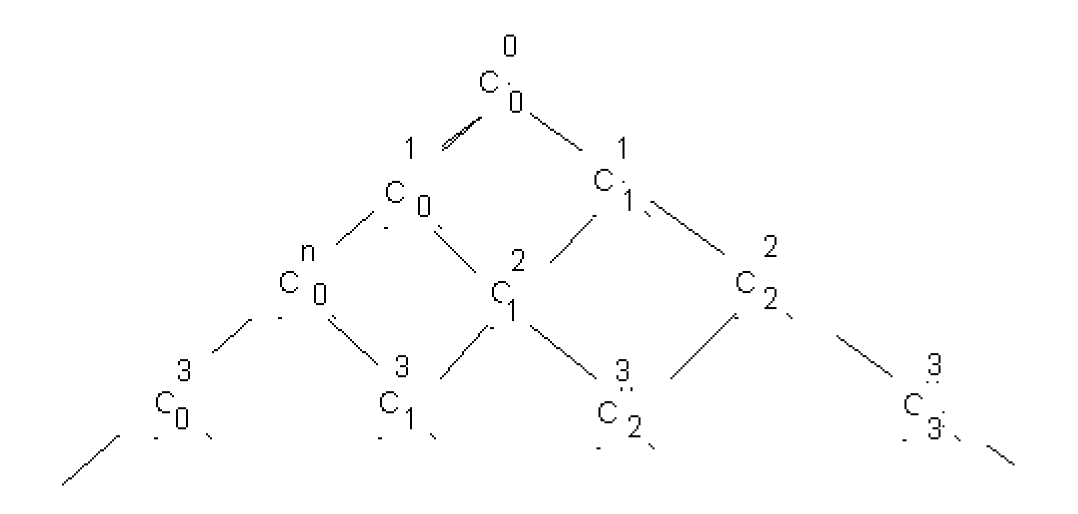
$$(x+y)^4 = x^4 + 4xy^3 + 6x^2y^2 + 4x^3y + y^4$$

6.7 مثلث باسكال Pascal Triangle

يستعمل لحساب C^n_k من قانون باسكال Pascal Identity

$$C^{n+1}_{k} = C^{n}_{k} + C^{n}_{k-1}$$

كالتالي:



مثلث باسكال

مع ملاحظة أن

$$C(n, 0) = C(n, n)=1$$

بتطبيق قانون باسكال نحصل على باقي القيم كما يلي:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

6.8 تمـــارين (10)

1- أكتب جميع التباديل permutations للفئة {a, b, c}

2- كم كلمة طولها 6 أحرف يمكن تكوينها من الأحرف {a, b, c, d, e, f, g} بشرط أن تنتهي بحرف a وعدم تكرار أي حرف .

3- أحسب

a) P(6,3)
b) P(6,5)
c) P(8,1)

4- كم عدد الكلمات التي يمكن تكوينها في 5 خانات إذا كان لدينا 9 أحرف، وبشرط عدم تكرار أي حرف .

5- جمعية ذات 25 عضو، تتكون لجنة الإدارة من 4 أعضاء. كم عدد الاختيارات لتشكيل اللجنة من بين أعضاء الجمعية؟

6- تحتوي اللغة الانجليزية على 26 حرفا، منها 5 متحركات vowels وأخرى ساكنة consonant عددها 21. كم عدد الكلمات التي يمكن تكوينها من 6 أحرف بحيث يوجد حرف متحرك واحد بالكلمة ؟

7- إذا كان بالمؤسسة 10 رجال و 15 امرأة . كم عدد الطرق لتكوين لجنة ذات 6 أعضاء بشرط أن يكون هناك عدد متساوي من الرجال والنساء باللجنة؟

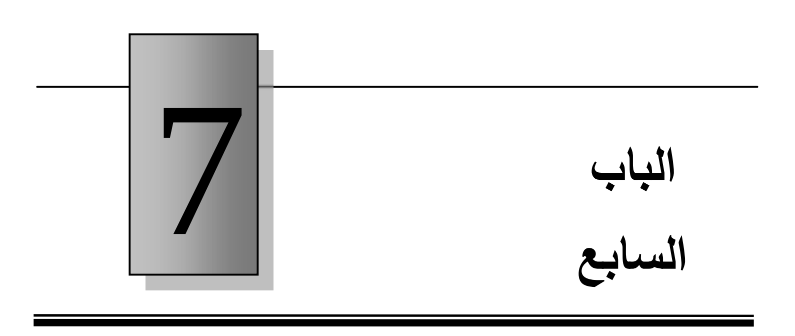
8- كم عدد المباريات التي يمكن إجراؤها في الدوري إذا كان عدد الفرق 10 بحيث لابد أن يقابل كل فريق الفريق الآخر؟

9- كم عدد الكلمات الثنائية ذات طول 10 بت وتحتوي على ثلاثة "1" وعلى سبعة "0" ؟

10- اثبت قانون باسكال

$$C_k^{n+1} = C_k^n + C_{k-1}^n$$

11- اكتب برنامجا يطبع 10 أسطر الأولى من مثلث باسكال



العــلاقات Relations

7.1 مقدمة

العلاقة الثنائية من الفئة A الى الفئة B

Binary Relation from A to B

هي فئة جزئية من الفئة $A \times B$.

أي أنها مجموعة من الأزواج المرتبة (a, b) حيث $a \in A$, $b \in B$.

سندرس في هذا الباب أنواع العلاقات وطرق تمثيلها في الحاسوب.

7.2 أمثلة

مثال(1):

إذا كان الزوج المرتب (a, b) تعني أن الطالب a مسجل في المقرر b ، فهذا يعرّف علاقة.

مثلا إذا كان(أحمد آدم) مسجل بالمقرر (التراكيب المنفصلة) فإن الزوج المرتب:

(التراكيب المنفصلة ، أحمد آدم)

يعتبر عضوا في هذه العلاقة .

مثال(2):

إذا كانت العلاقة R تحتوي على الأزواج المرتبة (x, y) التي تعني أن x مدينة في البلد y ، فهل ينتمي العنصر (Tripoli, Egypt) إلى العلاقة R.؟

الإجابة:

(لا) لان طرابلس Tripoli تقع في ليبيا (أو لبنان) وليس في مصر Egypt.

مثال(3):

إذا كان

A = {0, 1 , 2} B = {a, b}

R = {(0, a), (0,b), (1, a), (2, b)}

فإن R تعتبر علاقة بين B , A حيث

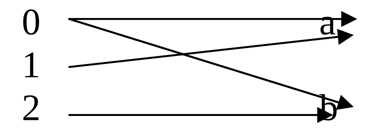
(1,b) $\notin$ R (0,a) $\in$ R

أو نستخدم التعبير (بنفس المعنى)

0 R a

1 $\not R$ b

هذه العلاقة يمكن تمثيلها بيانيا كالتالي:



أو عن طريق جدول كالآتي:

R	a	b
0	×	×
1	×	
2		×

7.3 الـدالة Function

تعتبر الدالة نوعا خاصا من العلاقات، أي أنها أيضا فئة من الأزواج المرتبة ولكن بشرط أن يكون لكل عنصر في النطاق A عنصر واحد يقابله في المدى B .

لاحظ في المثال السابق أن العلاقة ليست دالة لأن العنصر 0 يقابله عنصران في المدى هما b ., a

بمعنى أن كل دالة علاقة وليست كل علاقة دالة .

أي أن العلاقة يمكن أن تكون من نوع one-to-many واحد–للعديد ولكن الدالة لا يمكن أن تكون من هذا النوع.

لاحظ أيضا أن العلاقة يمكن أن تكون بين الفئة A ونفسها، ونقول في هذه الحالة أن العلاقة على الفئة A.

مثال:

إذا كانت العلاقة R معرفة على الفئة $A = \{1,2,3,4\}$ بحيث (a, b) تعني أن:

a divides b

أي b تقبل القسمة على a ، أوجد العلاقة R بحيث $b \in A$ ؟

<u>الإجابة:</u>

$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$

مثال:

مثل العلاقة R (في المثال السابق) بجدول.

<u>الإجابة:</u>

R	1	2	3	4
1	×	×	×	×
2		×		×
3			x	
4				×

مثال: اسرد عناصر العلاقة R حيث

R = {(a, b) : a and b are positive integer and a ≤ b}

<u>الإجابة:</u>

$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \ldots, (2, 2), (2, 3),\ldots,(3, 3), (3,4),\ldots\}$

أي أن R تحتوي على مالانهاية من العناصر .

مثال: كم عدد العلاقات التي يمكن تعريفها من الفئة A الى B إذا كانت A ذات n عنصر و B ذات m عنصر؟

عدد عناصر الفئة الشاملة $A \times B$ هو nm
وبما أن عدد الفئات الجزئية في أي فئة تحتوي على k من العناصر هو 2^k فإنه يمكن تعريف 2^{nm} علاقة ثنائية .

7.4 أنواع العلاقات

1– العلاقة الانعكاسية reflexive relation

هي العلاقة على الفئة A بحيث :

$$\forall x \in A \quad x R x$$

مثال:

العلاقة a divides b

هي علاقة انعكاسية reflexive لأن كل عدد يقبل القسمة على نفسه وبالتالي فإن (x , x) تنتمي إلى هذه العلاقة .

2– العلاقة المتماثلة symmetric relation

هي العلاقة على الفئة A بحيث $\forall a, b \in A$

$$(a, b) \in R \leftrightarrow (b, a) \in R$$

أي (بتعبير آخر)

$$a \ R \ b \leftrightarrow b \ R \ a$$

3– العلاقة اللامتماثلة anti-symmetric Relation

هي العلاقة التي يتحقق فيه الشرط :

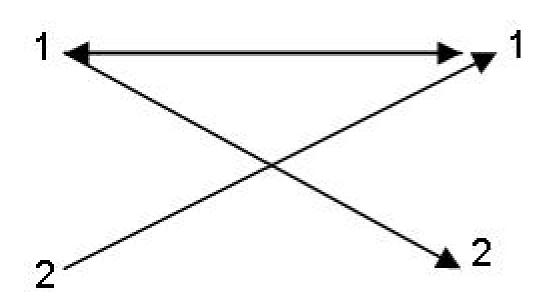
$$(a \ R \ b) \wedge (b \ R \ a) \leftrightarrow a = b$$

مثال:

العلاقة التالية متماثلة symmetric relation

R = {(1,1),(1,2),(2,1)}

كما مبين بالشكل التالي:



علاقة متماثلة symmetric

مثال:

العلاقة التالية لا متماثلة anti symmetric

R = {(1,1) , (1,2)}

مثال:

ما نوع العلاقة:

$$R = \{(x, y) \mid x, y \in Z , x \geq y \}$$

الإجابة: هذه العلاقة لا متماثلة لأن

$$x \geq y \text{ and } y \geq x \leftrightarrow x=y$$

أي أن

$$x R y \wedge y R x \leftrightarrow x = y$$

4- العلاقة الانتقالية Transitive Relation

هي العلاقة التي تحقق الأتي:

$$\forall a, b, c \in A \text{ if } a R b \wedge b R c \text{ then } a R c$$

أي إذا كانت (a, b) ، (b, c) تنتمي إلى العلاقة R فإن (a, c) تنتمي إلى R أيضا.

مثال: العلاقة التي عناصرها (x,y) حيث y , x عدد صحيح موجب بحيث

$$x > y$$

تعتبر علاقة انتقالية لأن

$$(a > b) \wedge (b > c) \rightarrow a > c$$

مثال: العلاقة: x شقيق y

هي علاقة انتقالية لأن إذا كان a شقيق b وكان b شقيق c فهذا يعني أن a شقيق c.

مثال: هل العلاقة x ابن خال y علاقة انتقالية ؟

الإجابة طبعا لا !

هل العلاقة (x إبن عم y) انتقالية ؟

الإجابة أيضا لا، لأن ابن عم ابن عمك قد يكون شقيقك وليس ابن عمك.

7.5 العلاقات بين مجموعة من الفئات n-ary Relations

ناقشنا حتى الآن العلاقة الثنائية (أي العلاقة بين فئتين) ولكن قد يوجد أحيانا 3 فئات (وليس اثنين فقط) تربطها علاقة ما .

مثلا

$$R = \{(a, b, c) : a > b > c\}$$

حيث c , b , a أعداد صحيحة موجبة

في هذه الحالة

$$(3,2,1) \in R$$

$$(1,2,3) \notin R$$

ملاحظة: يسمى العنصر (a, b , c) Triple أي ثلاثي .

بصورة عامة يمكن أن تكون العلاقة على النحو التالي:

$$R = \{(a_1,a_2,..,a_n): a_1>a_2>\ldots> a_n\}$$

هذا المثال بين الفئات:

$$A_1,A_2, .., A_n$$

حيث $a_i \in A_i$ ويسمى العنصر

$$(a_1, a_2, \ldots,a_n)$$

n-tuple (نوني)

مثال: إذا كانت عناصر العلاقة R هي الرباعي:

(name, id ,major, GPA).

حيث name اسم الطالب ، id رقم الطالب ، major تخصص الطالب ، GPA متوسط درجاته فإن R علاقة ذات 4-tuple ويمكن تمثيلها بجدول به 4 أعمدة، عمود لكل فئة.

ملاحظة: يسمى الرباعي(name, id , major, GPA) بالسجل record في قواعد البيانات.

حيث تتكون قاعدة البيانات Database من مجموعة سجلات (أي مجموعة n-tuple) وكل عنصر في السجل يسمى حقل field.

وتوضع العلاقة في قاعدة البيانات على شكل جدول table.

ويكون للجدول مفتاح رئيسي primary key وهو عبارة عن قيمة تميز كل سجل عن الآخر، مثلا رقم الطالب id في جدول بيانات الطلبة.

7.6 تمثيل العلاقات باستخدام المصفوفات
Representing relations using matrices

يمكن تمثيل العلاقات بين الفئات المحدودة باستخدام المصفوفات الثنائية.

فإذا كانت

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$

فإن العلاقة R من A إلى B يمكن تعريفها كالتالي:

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } (a_i, b_j) \in R \\ 0 & \text{if } (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

مثال: دع

$A = \{1,2,3\}$

$B = \{1,2\}$

حيث

$a \, R \, b \leftrightarrow a > b$

كيف نمثل هذه العلاقة بالمصفوفة M ؟

<u>الإجابة:</u>

$$\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

حيث نلاحظ أن:

$$M_{11} = 0 \leftrightarrow (1,1) \notin R$$
$$M_{12} = 0 \leftrightarrow (1,2) \notin R$$
$$M_{21} = 1 \leftrightarrow (2,1) \in R$$
$$M_{22} = 0 \leftrightarrow (2,2) \notin R$$
$$M_{31} = 1 \leftrightarrow (3,1) \in R$$
$$M_{32} = 1 \leftrightarrow (3,2) \in R$$

مثال: إذا كان

$$A = \{a_1, a_2 , a_3 \}$$
$$B = \{b_1, b_2, b_3, b_4 , b_5\}$$

وكانت المصفوفة

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

تمثل العلاقة بين A و B ، ما هي عناصر هذه العلاقة ؟

الإجابة:

$$R = \{(a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_3), (a_2, b_4), (a_3, b_1), (a_3, b_3), (a_3, b_5)\}$$

ملاحظات:

(1) إذا كانت M مصفوفة مربعة فإن العلاقة R تعتبر انعكاسية reflexive إذا كانت عناصر القطر في المصفوفة M كلها تساوي1 ، أي:

$$m_{ii} = 1$$

أو بتعبير آخر:

$$\sum m_{ij} = n$$

(2) إذا كان M مصفوفة مربعة وكانت أيضا متماثلة أي:

$$M_{ij} = M_{ji}$$

فإن العلاقة R أيضا متماثلة symmetric

(3) إذا كانت المصفوفة M تحقق الآتي:

$$m_{ij} = 0 \rightarrow m_{ji} = 1$$
$$m_{ij} = 1 \rightarrow m_{ji} = 0$$

فإن العلاقة R تعتبر لامتماثلة anti-symmetric

مثال: دع

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

تمثل العلاقة R . هل هذه العلاقة :

أ- انعكاسية reflexive

ب- متماثلة symmetric

ج- لامتماثلة anti symmetric

إجابـة (أ) "نعم انعكاسية" لأن القطر كله 1.

وإجابة (ب)"نعم متماثلة" لآن M مصفوفة متماثلة.

وإجابة (ج) "لا ليست لامتماثلة" بطبيعة الحال لأنها متماثلة .

7.7 تمـــارين (11)

(1) إذا كانت R علاقة من A إلى B حيث:

A = {0,1,2,3,4}
B = {0,1,2,3}

أوجد العلاقة a R b حيث

(أ) a = b

(ب) $a + b = 4$

(ج) $a > b$

(2) بين نوع العلاقات التالية :

a) {(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4)}
b) {(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)}
c) {(2,4),(4,2)}

(3) ما نوع العلاقات التالية :

أ- x أطول من y.

ب- x ، y مولودان في نفس اليوم.

ج- x ، y لهما نفس الاسم.

د- x ، y لهما نفس الجد.

علما بأن العلاقة معرفة على فئة جميع البشر .

(4) ما نوع العلاقات في تمرين (1).

(5) ما هي عناصر العلاقة ذات الثلاثيات (a, b, c) بحيث

$0 < a < b < c < 5$ ؟

(6) مثل العلاقات التالية باستخدام المصفوفة الثنائية :

a) {(1,1),(1,2),(1,3)}
b) {(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)}
c) {(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)}
d) {(1,3),(3,1)}

(7) بين ما إذا كانت العلاقة R التي تمثلها المصفوفة التالية:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

أ- انعكاسية.

ب- متماثلة.

ج- لا متماثلة.

7.8 علاقات التكافؤ Equivalence Relations

تسمى العلاقة على الفئة A علاقة تكافؤ إذا (وفقط إذا) كانت:
انعكاسية reflexive، وتماثلية symmetric، وانتقالية transitive.

مثال: دع العلاقة

a R b

تعني أن a ، b كلمتان بنفس عدد الأحرف.

هل هذه العلاقة انعكاسية؟

نعم لآن a R a (أي أن الكلمة تناظر نفسها من حيث عدد الأحرف).

هل هي علاقة متماثلة؟

نعم فإذا كانت الكلمة ذات نفس عدد الأحرف مثل كلمة أخرى فإن تلك الكلمة لها نفس عدد الأحرف مثل الكلمة الأولى.

وأخيرا **هل هي علاقة انتقالية؟**

نعم لأن إذا كان لدينا 3 كلمات، وكانت الكلمة الأولى ذات n حرف، وكانت الكلمة الثانية مساوية لها في عدد الأحرف، فإن عدد حروفها يكون n أيضا، وإذا الكلمة الثالثة مساوية للثانية في عدد الأحرف فإن أحرفها سيكون أيضا n .

من هذه الخصائص الثلاثة نستنتج أن هذه العلاقة هي علاقة تكافؤ.

مثال: هل العلاقة

$$a \, R \, b \leftrightarrow a^2 = b^2$$

علاقة تكافؤ ؟

نلاحظ أن هذه العلاقة :

1. انعكاسية reflexive لأن $a^2 = a^2$
2. متماثلة symmetric لأن $a^2 = b^2$ تكافئ $b^2 = a^2$
3. انتقالية transitive لأن إذا كان $a^2 = b^2$ و $b^2 = c^2$ فإن $a^2 = c^2$

لذلك فهي تحقق الشروط الثلاثة في علاقة التكافؤ.

مثال: بين أن العلاقة

$$R = \{(a, b) : a = b \pmod m\}$$

علاقة تكافؤ.

ملاحظة : إذا كان b , a عددين صحيحين فإن :

$$a= b \pmod m \leftrightarrow \exists \text{ integer } k : a = b + km$$

مثلا $13= 1 \pmod{12}$

لآن $13 = 1 + (1)(12)$

و

$26 = 2 \pmod{12}$

لآن $26 = 2 + (2)(12)$

$35 = 5 \pmod 6$

لآن $35 = 5 + (5)(6)$

والآن لإثبات علاقة التكافؤ نلاحظ أن هذالعلاقة:

1. انعكاسية reflexive لأن

$$a R a \leftrightarrow a =a \pmod m$$

لأن $a = a + (0)m$

2. متماثلة symmetric لأن

$$a R b \rightarrow a = b + km \rightarrow b = a - km$$
$$\rightarrow b= a + (-k)m \rightarrow b R a$$

3. انتقالية transitive لأن

$$a R b \wedge b R c \rightarrow$$
$$a = b + km \wedge b=c +Lm$$
$$a = c + Lm + km = c + (L+ k)m$$
$$= c + n m$$

حيث k , L ، n=k+L أعداد صحيحة. أي أن a R b .

7.9 فصيلة التكافؤ Equivalence Class

إذا كانت R علاقة على الفئة A فإن الفئة

$$[a]R = \{s: (a, s) \in R\}$$

حيث a عنصر في الفئة A ، تسمى [a]R بفصيلة تكافؤ للعنصر a.

مثال 1: دع A تمثل فئة طلبة الكلية والعلاقة aRb تعني أن a و b طالبان يدرسان في نفس القسم

دع c = طالب من قسم الرياضيات.

إذن فإن الفئة

$$[c]R = \{s : (c, s) \in R\}$$

تمثل فصيلة جميع طلبة قسم الرياضيات.

لاحظ أن علاقة التكافؤ تقسم الفئة A إلى فئات جزئية لايوجد بينها تقاطع، أي أن تقاطعها هو فئة خالية.

فمثلا تقاطع فئة طلبة الرياضيات وطلبة النبات هو فئة خالية. فإذا كان c طالب من قسم الرياضيات و d طالب من قسم النبات فإن تقاطع الفئتين:

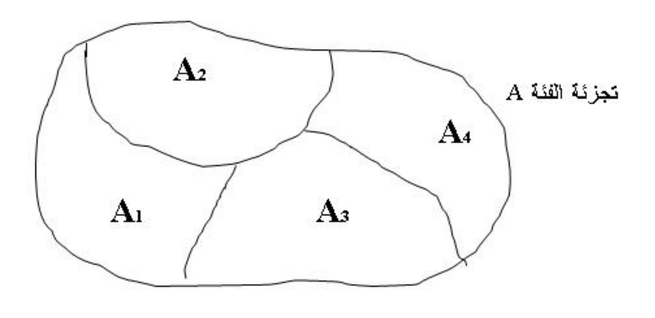
$$[c]R \cap [d]R = \emptyset$$

تسمى هذه العملية بالتجزئة partitioning . أي من أهم استخدامت علاقات التكافؤ أنها تقسم الفئة الشاملة الى فئات جزئية غير متقاطعة.

حيث (في المثال السابق) يمكننا تجزئة الفئة (طلبة الكلية) إلى فئات جزئية، كل واحدة تمثل طلبة قسم معين. أي أن

$$\cap A_i = \emptyset \qquad A = \cup A_i$$

والشكل التالي يبين كيف نقسم الفئة الشاملة الى 4 فئات جزئية:



مثال 2:

إذا كان لدينا العلاقة :

$$a \equiv b \pmod 4$$

فإن

الفصائل الأربعة

$$[0] = \{\ldots,-8, -4, 0, 4, 8,\ldots\}$$
$$[1] = \{\ldots,-7, -3, 1, 5, 9,\ldots\}$$
$$[2] = \{\ldots,-6, -2, 2, 6, 10,\ldots\}$$
$$[3] = \{\ldots, -5, -1, 3, 7, 11,\ldots\}$$

هي فصائل تكافؤ لأن تقاطعها فارغ واتحادها هو جميع الأعداد الصحيحة.

7.10 برامج لاختبار العلاقات

مثال1 : أكتب برنامج يقرأ المصفوفة الثنائية m ويختبر إذا ما كانت تمثل علاقة انعكاسية ؟

في هذا البرنامج نستخدم الخاصية: $\sum m_{ii} = n$ لاختبار العلاقة الانعكاسية.

```
Program Reflexive ;
VAR  s , i , j , n : INTEGER;
                        m : ARRAY[1..10,1..10] of  INTEGER;
            BEGIN
                         Readln(n) ;
                          FOR i:=  1  TO  n  DO
                         FOR j:=  1  TO  n  DO
                         Begin
                              WRITE('Enter m',i,j,  '→ ') ;
                             Readln(m[i,j]) ;
                          END ;
                          s:=0 ;
                          FOR i:= 1  TO  n   DO
                               s:= s + m[i,i] ;
                          IF (s = n) THEN
                                WRITELN('Reflexive') ;
                          ELSE
                                WRITELN('Not reflexive') ;
                   END .
```

مثال4 : أكتب جزءا من برنامج لاختبار المصفوفة هل هي متماثلة أو غير متماثلة.

```
……..
      ……..
      FOR i:= 1    TO n   DO
      FOR j:= i + 1   TO  n  DO
            IF (m[i,j] = m[j,i]) THEN
                  flag:= 1
            ELSE
            BEGIN
                  flag:= 0 ;
                  GOTO   LB1 ;
            END
LB1 :     IF (flag = 1)THEN
                  WRITLN('symmetric')
          ELSE
                  WRITELN('Not symmetric') ;
```

7.11 تمـــارين (12)

1- أي من العلاقات التالية على الفئة {0,1,2,3} تعتبر علاقة تكافؤ ؟

أ- {(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)}

ب- {(0,0),(0,2),(2,0),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)}

ج- {(0,0),(1,1)(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)}

د- {(0,0),(1,1),(1,3),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)}

هـ - {(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,2),(3,3)}

2- بين أن العلاقة x R y حيث x , y نضيدان strings طول كل منهما 3 بت أو أكثر ،بحيث x , y يتفقان في الخانات الثلاثة الأولى، هي علاقة تكافؤ على فئة النضائد ذات طول 3 بت فما فوق.

3- أوجد فصيلة التكافؤ للعلاقات التالية:

(أ) a R b ↔ a , b طالبان من نفس العمر.

(ب) x R y ↔ x , y طالبان يتكلمان نفس اللغة (اللغة الأم).

4- أوجد جميع فصائل التكافؤ للعلاقة

$$a = b \pmod 5$$

5- أكتب برنامج لقراءة مصفوفة ثنائية مربعة M تصف العلاقة R واختبار ما إذا كانت العلاقة لا متماثلة anti symmetric

7.11 الترتيب الجزئي Partial Ordering

تعريف:

إذا كانت العلاقة R على الفئة S من نوع:

(1) انعكاسية Reflexive

(2) لا متماثلة Anti symmetric

(3) انتقالية Transitive

فإن هذه العلاقة تسمى ترتيب جزئي. أما الفئة S مع العلاقة R فتسمى فئة مرتبة جزئيا Poset حيث

Poset = Partially ordered set

ويرمز لها بالرمز (S,R).

مثال1: دع Z تمثل فئة الأعداد الصحيحة و x R y تعني $x \geq y \quad x \in Z , y \in Z$

هل هذه العلاقة ترتيب جزئي ؟

الإجابة:

نعم فهي تحقق الشروط الثلاثة (انعكاسية لأن $x\geq x$ ، ولا متماثلة لأن $y \geq x$، و $x\geq y$ إذا وفقط إذا $x=y$ ، وانتقالية لأن $x\geq y$ و $y\geq z$ يعني أن $x\geq z$ ، لذلك فهي ترتيب جزئي لفئة الأعداد الصحيحة Z.

مثال2: دع $x\ D\ y$ تعني $x, y \in Z^+$

و أن x تقبل القسمة على y ، وحيث Z^+ هي فئة الأعداد الصحيحة الموجبة. هل هذه علاقة ترتيب جزئي ؟

الإجابة:

نعم لأنها تحقق الشروط الثلاثة (أي أن العلاقة انعكاسية ولامتماثلة وانتقالية) لذلك فإن (Z^+, D) هي فئة مرتبة جزئيا Poset .

مثال3: دع $a\ R\ b$ تعني $a \subseteq b$ حيث $a, b \in P(S)$

P(S) هي فئة القوى للفئة S

هل $(P(S),\subseteq)$ فئة مرتبة جزئيا Poset ؟

الإجابة: يمكنك التحقق من الشروط الثلاثة

1-حيث أن $A \subseteq A$ كلما كانت A فئة جزئية من S. أي أن العلاقة $\subseteq$ انعكاسية reflexive

2- كما أنها لامتماثلة لأن:

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \rightarrow A = B$$

3-وهي أيضا انتقالية لأن:

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C$$

لذلك فإن $\subseteq$ هي ترتيب جزئي على فئة القوى P(S)، كما أن $(P(S),\subseteq)$ تعتبر ترتيب جزئي Poset.

ملاحظة:

ليس كل الفئات في فئة القوى P(S) فئات جزئية من بعضهم . مثلا إذا كانت :

$$S = \{1,2,3\}$$

فإن $\{1, 2\} \not\subseteq \{1, 3\}$

أي لا يجوز المقارنة بين هاتين الفئتين بالعلاقة $\subseteq$.

تعريف:

في الفئة المرتبة جزئيا (S, R) إذا كان a ، b عنصران في الفئة S بحيث

إما a R b أو b R a

فإن العنصرين a , b قابلان للمقارنة comparable.

أما إذا كان ذلك غير صحيح فيعتبران غير قابلين للمقارنة incomparable.

مثال4: هل العنصران 3 و 9 قابلان للمقارنة في الترتيب الجزئي (Z^+، D) (حيث D تعني علاقة قابلية القسمة)؟

الإجابة:

نعم لأن 9 تقبل القسمة على 3 .

مثال5: هل العنصران 5 و 7 قابلين للمقارنة في الترتيب الجزئي (Z^+، D)؟

الإجابة:

لا لأن 5 لاتقبل القسمة على 7 وأيضا 7 لاتقبل القسمة على 5 .

7.12 الترتيب الكلي Total order

إذا كان كل عنصرين في الفئة المرتبة جزئيا(S, R) قابلين للمقارنة فإن هذه الفئة تعتبر مرتبة كليا Total order كما تسمى ترتيبا خطيا Linear order

مثال1: الفئة ($Z, \leq$) حيث $\leq$ تعني (أقل من أو تساوي) هي ترتيب كلي (خطي) لأن كل عددين صحيحين يكون مقارنتهما على النحو $a \leq b$ صحيحة.

مثال2: الفئة (Z^+, D) حيث | تعني قابلية القسمة ليست مرتبة ترتيبا كليا لأن بعض الأعداد الصحيحة لا تقبل القسمة على بعض الأعداد الأخرى.

7.14 الترتيب الحسن Well-Order

تعريف:

إذا كانت (S,R) ذات ترتيب كلـي وكانت كل فئة جزئيـة مـن S لها عنصر أدنـى Least Element فإن (S, R) تعتبر حسنة الترتيب well-ordered.

مثال1: هل الترتيب $(Z, \leq)$ ترتيب حسن؟

حيث Z هي فئة الأعداد الصحيحة.

الاجابة : نعم فهو ترتيب كلي وأي فئة من الأعداد الصحيحة لها عنصر هو الأصغر من باقي العناصر يسمى العنصر الأدنى.

مثال2: دع $S = Z^+ \times Z^+$

أي أن S فئة الأزواج الصحيحة الموجبة .

ودع العلاقة $(a1,a2) \leq (b1,b2)$

تعني أن $a1 < b1$

أو $a1 = b1$ and $a2 \leq b2$

يسمى هذا الترتيب Lexicographic order

وهو المستخدم في ترتيب الكلمات في القاموس (أي الترتيب الأبجدي) حيث على سبيل المثال:

"am" < "is"

لأن a تأتي في الترتيب قبل i ، بينما

"if" < "in"

هنا الحالة $(a1 = b1)$ أي يتساوى النضيدان في الحرف الأول فننظر إلى الحرف الثاني حيث نجد: "f" < "n"

هذا الترتيب الأبجدي يعتبر حسن الترتيب well-ordered (الإثبات تمرين).

مثال2: هل $(Z,\leq)$ حسنــة الترتيب ؟

(حيث Z فئة الأعداد الصحيحة)

الإجابة:

لا ، حيث أن الفئة الجزئية $\{\ldots,-3,-2,-1\} \subseteq Z$

ليس لها عنصر أدنى. لذلك فإن $(Z,\leq)$ ليست حسنة الترتيب well-ordered.

7.15 تمـــارين (13)

1) أي من الآتي يعتبر Poset (فئة مرتبة جزئيا)؟

a) $(Z , =)$
b) $(Z , \neq)$
c) $(Z , \geq)$
d) $(Z , \nmid)$

حيث $\nmid$ تعني عدم قابلية القسمة.

2) أوجد عنصرين غير قابلين للمقارنة incomparable في الفئات المرتبة جزئيا التالية:

a) $(P\{0,1,2\} , \subseteq)$
b) $(\{1,2,4,6,8\} , |)$

3) اثبت أن الترتيب الأبجدي للكلمات التي تتكون من حرفين يعتبر حسن الترتيب well-ordered. وأيضا يعتبر ترتيبا كليا Total-ordered.